3. Moment setrvačnosti z torzních kmitů a modul pružnosti v torzi

1. Klíčová slova

Kmitavý pohyb, perioda, doba kyvu, moment setrvačnosti tělesa, frekvence, úhlová frekvence.

2. Princip

Torzní kyvadlo je realizováno jako svislý torzní drát pevně upnutý v závěsu a různá tělesa upevněná na dolním konci a konající torzní kmity. Ze známé závislosti periody na momentu setrvačnosti kmitajícího tělesa lze měřením period torzních kmitů a srovnávacím výpočtem ze známého momentu setrvačnosti stanovovat momenty setrvačnosti těles. Navíc se stanovuje direkční moment drátu a modul pružnosti v torzi materiálu drátu.

3. Přístroje a pomůcky

Stojan se závěsem, měřený ocelový drát, plechová deska o neznámém momentu setrvačnosti, ocelová tyč, dva stejné přívažky, mikrometr, posuvné měřítko, pásové měřítko systém ISES s optickou závorou, počítač.

4. Úkol

A. Určete moment setrvačnosti tyče metodou přívažku.
B. Z momentu setrvačnosti tyče a periody jejích torzních kmitů vypočtěte modul pružnosti závěsu.
C. Pomocí zjištěného momentu setrvačnosti tyče určete moment setrvačnosti kruhové desky.
D. Pro kruhovou desku zjistěte rozměry a hmotnost a ověřte její moment setrvačnosti výpočtem. Kriticky posuďte, která z metod za jakých okolností dává správnější výsledek.

5. Teorie

Moment setrvačnosti

Kinetická energie rotačního pohybu soustavy hmotných bodů rotujících kolem pevné osy je

$$W_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} v_\mathrm{i}^2 = \frac{1}{2}\omega\sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} r_\mathrm{i}^2, \quad [W] = \mathrm{J}, \tag{3.1}$$

kde v_i je rychlost i-tého hmotného bodu, r_i je jeho vzdálenost od osy otáčení a ω úhlová rychlost rotačního pohybu. Výraz

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_\mathrm{i} r_\mathrm{i}^2, \quad [J] = \mathrm{kg\ m^2}, \tag{3.2}$$

v rovnici (3.1) nazýváme moment setrvačnosti soustavy hmotných bodů vzhledem k dané ose otáčení. Pro případ spojitého rozložení látky v tělese lze sumu psát jako integrál

$$J = \int_m r^2 \,\mathrm{d}\, m, \quad [J] = \mathrm{kg\ m^2}, \tag{3.3}$$

kde r je vzdálenost hmotného elementu dm od osy otáčení. Integrujeme přes celou hmotnost tuhého tělesa. Jak vyplývá ze vztahu (3.3), závisí moment setrvačnosti pouze na hmotnosti tělesa a jejím rozložení vzhledem k ose otáčení. Tohoto vztahu je možné použít i pro přímý výpočet momentu setrvačnosti pravidelných těles se známým rozložením hmotnosti vůči některé rotační ose. Příslušné vztahy pro některé jednoduché případy jsou uvedeny v tabulce 3.1.

Modul pružnosti ve smyku (torzi)

Působí-li síla $\boldsymbol{F}_t$ tak, že dochází k posuvu jednotlivých vrstev materiálu v tečném směru (viz. obr. 3.1), pak definujeme relativní posunutí

$$\gamma = \frac{\Delta b_0}{b_0}, \quad [\gamma] = 1. \tag{3.4}$$

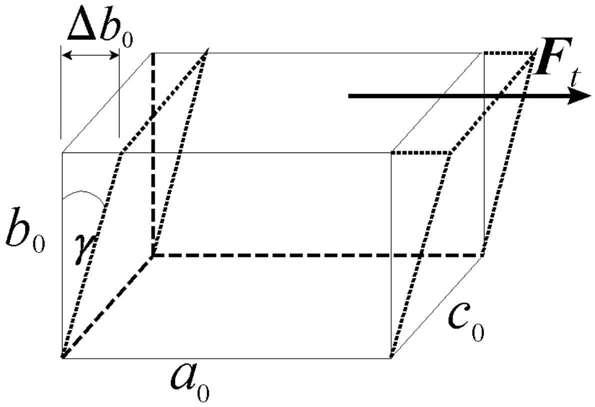
Deformace je přímo úměrná tečnému napětí τ, které je (podle obr. 1)

$$\tau = \frac{F_\mathrm{t}}{S} = \frac{F_\mathrm{t}}{a_0 c_0}, \quad [\tau] = \mathrm{Pa}. \tag{3.5}$$

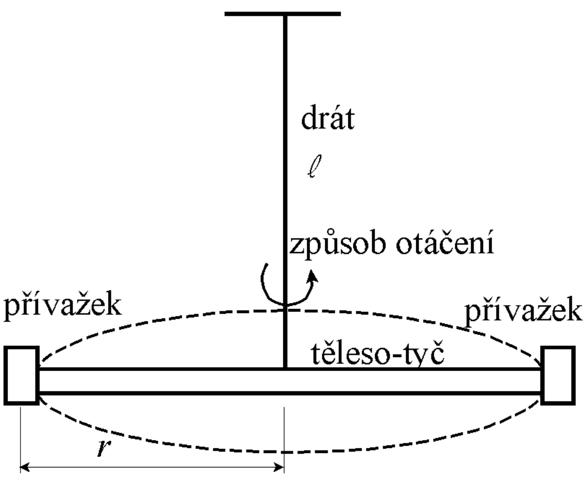
Platí, že

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad [G] = \mathrm{Pa}. \tag{3.6}$$

Vlastnosti materiálů při deformaci pak charakterizujeme tzv. modulem pružnosti ve smyku G (viz vztah 3.14). Pro případ kroucení tyče se tato veličina nazývá modul pružnosti v torzi. G je číselně rovno tečnému napětí, při kterém by relativní posunutí γ dosáhlo velikosti 1.



Obr.3. 1 Smyková deformace tuhého tělesa



Obr.3. 2 Soustava tělesa s přívažky konající torzní kmity

6. Pokyny pro měření:

Metoda torzních kmitů umožňuje měřit moment setrvačnosti na základě měření kmitavého pohybu tělesa, uchyceného na deformovatelném závěsu.

Těleso zavěsíme na přímý ocelový drát. Zkroutíme-li drát a vzápětí jej uvolníme, těleso začne vykonávat torzní kmity kolem osy, totožné s osou drátu, s dobou kmitu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}\ , \tag{3.7}$$

kde D je direkční moment drátu (viz. dále) závislý na modulu pružnosti ve smyku G a geometrických rozměrech drátu. Při měření momentu setrvačnosti je možné veličinu G vyloučit, a to měřením pomocí dvou přívažků o známém momentu setrvačnosti $2J_p$. Nejdříve změříme dobu kmitu tělesa o neznámém momentu setrvačnosti, pro niž platí rovnice (3.7). Pak k tělesu přidáme 2 přívažky a celou soustavu necháme vykonávat opět torzní kmity, ovšem s dobou kmitu

$$T_\mathrm{S} = 2\pi\sqrt{\frac{J_S}{D}}\ , \tag{3.8}$$

kde J_s je moment setrvačnosti celé takto vzniklé soustavy a platí pro něj

$$J_S = J + 2J_p\,. \tag{3.9}$$

Z rovnic (3.7) až (3.9) plyne

$$J = \frac{T^2}{{T_S}^2 - T^2}\,2J_p\,. \tag{3.10}$$

Použité přívažky jsou obvykle 2 válečky symetricky umístěné co nejdále od torzní osy. Při měření je třeba zajistit, aby rozdíl dob kmitů T_s - T byl dostatečně velký kvůli minimalizaci chyby. Moment setrvačnosti přívažku vypočteme ze vztahu platného pro hmotný bod

$$J_p = m\,r^2\,. \tag{3.11}$$

Přívažek proto aproximujeme hmotným bodem ve vzdálenosti r od torzní osy (viz obr 3.2).

Měření modulu pružnosti ve smyku *G* dynamickou metodou z torzních kmitů

Na homogenní drát délky ℓ o poloměru r zavěsíme těleso o hmotnosti m_t o m_d (m_d je hmotnost drátu). Známý moment setrvačnosti zavěšeného tělesa vzhledem k ose drátu je J. Zkroucení drátu kolem podélné osy o úhel n je způsobeno silovou dvojicí o momentu $\boldsymbol{M}$. Pro M platí:

$$M = D\varphi\,, \quad [M] = \mathrm{Nm}\,, \tag{3.12}$$

kde veličina

$$D = \frac{\pi G r^4}{2\ell}\,, \quad [D] = \mathrm{Nm\ rad^{-1}} \tag{3.13}$$

je direkční moment a G je modul pružnosti v torzi drátu. Po zkroucení drátu s uchyceným tělesem o úhel n a uvolnění začne těleso konat torzní kmity s periodou danou rovnicí (3.7). Dosazením za D a úpravou dostaneme pro modul pružnosti

$$G = \frac{8\pi\ell J}{r^4 {T_S}^2}\,. \tag{3.14}$$

Pro stanovení modulu pružnosti drátu je tedy třeba určit jeho délku a poloměr. Pak z doby torzních kmitů zavěšeného tělesa o známém momentu setrvačnosti můžeme modul pružnosti dopočítat.

Určení momentu setrvačnosti nepravidelného tělesa

Z rovnice (3.7) vyplývá, že perioda torzních kmitů je přímo úměrná odmocnině z momentu setrvačnosti zavěšeného tělesa. Z již známého momentu setrvačnosti soustavy J_s a její periody T_s nebo J a T pak lze vypočíst moment setrvačnosti neznámého tělesa J_t

$$J_t = J_S \frac{T_t^2}{T_S^2}\,. \tag{3.15}$$

Měření spočívá pouze ve stanovení periody torzních kmitů daného tělesa T_t vzhledem k rotační ose. Ta je v rovnovážném stavu totožná s osou závěsného drátu.

Stanovení momentu setrvačnosti výpočtem

je vhodné pro tělesa pravidelného geometrického tvaru. Základem pro měření je vztah (3.3) který lze v některých případech snadno analyticky vypočítat. V následující tabulce jsou uvedeny momenty setrvačnosti některých geometricky pravidelných homogenních těles.

Požadavek na přesnost měření periody určíme rozborem chyby ze vztahu (3.10) a (3.11). Přesnost určení momentu setrvačnosti je dána především přesností určení vzdálenosti r přívažku od torzní osy, která je zřetelně nejhorší.

Měření periody provádíme pomocí systému ISES s optickou závorou a odečítáme postupnou metodou (viz kap. IV.2.1.).

Těleso		Osa, procházející těžištěm	Moment setrvačnosti k této ose
koule	poloměr r	libovolná	$2mr^2/5$
válec nebo kruhová deska	poloměr r výška h	geometrická	$mr^2/2$
		kolmá ke geom. ose	$m(r^2+h^2/3)/4$
pravoúhlý hranol	hrany a, b, c	rovnoběžná s a	$m(b^2+c^2)/12$

Tab. 3.1 Momenty setrvačnosti některých pravidelných homogenních těles

Pro výpočet modulu pružnosti závěsu neopomeneme změřit jeho průměr a délku (jen části podléhající pružné torzní deformaci). Pro srovnávací výpočty změříme a zvážíme všechna tělesa.

7. Pokyny pro zpracování

Splníme postupně všechny body zadání včetně příslušných výpočtů chyb. V závěru porovnáme modul pružnosti ve smyku s tabelovanou hodnotou a hodnoty momentů setrvačnosti určené z period torzních kmitů s hodnotami určenými z definičního vztahu. Případné nesrovnalosti se pokuste vysvětlit.

8. Kontrolní otázky

- Definujte moment setrvačnosti, uveďte jeho jednotku v SI.
- Jaký je princip měření momentu setrvačnosti tuhého tělesa z doby torzních kmitů?
- Jak dosáhneme toho, aby byl rozdíl dob kmitů T_s - T ve vztahu (3.9) dostatečně velký?
- Jak se vypočte chyba momentu setrvačnosti při měření pomocí modulu pružnosti závěsného vlákna?
- Které veličiny nejvíc ovlivňují přesnost měření?