2. Fyzikální kyvadlo

1. Klíčová slova

Fyzikální kyvadlo, matematické kyvadlo, kmitavý pohyb, perioda, doba kyvu, tíhové zrychlení, redukovaná délka fyzikálního kyvadla, moment setrvačnosti tělesa, frekvence, úhlová frekvence

2. Princip

Kyvadlo se dvěmi osami kyvu umístěnými na protilehlých stranách vzhledem k těžišti se posuvným závažím pokusmo nastaví tak, aby doba kyvu kolem obou os byla stejná. Vzdálenost a tato doba kyvu se použije pro výpočet tíhového zrychlení.

Jiné nepravidelné těleso zavěsíme a změříme dobu jeho kyvu, pak určíme polohu těžiště a vzdálenost osy – místa závěsu od těžiště. Z naměřených hodnot vypočteme moment setrvačnosti nepravidelného tělesa.

3. Přístroje a pomůcky

Reverzní kyvadlo, nepravidelná kovová deska, posuvné měřítko, počítač a souprava ISES s modulem „optická závora“, přípravek pro určení těžiště, pásové měřítko.

4. Úkol

A. Určete tíhové zrychlení pomocí reversního kyvadla.

B. Určete moment setrvačnosti tělesa nepravidelného tvaru (kovové desky) vzhledem ke zvolené rotační ose z doby kyvu v tíhovém poli. Zjistěte chybu výsledku.

C. Ověřte správnost výsledku výpočtem - aproximujte k tomu účelu měřené těleso zjednodušeným modelem

5. Teorie

Reversní kyvadlo je zvláštní případ fyzikálního kyvadla se dvěmi osami (body závěsu) na přímce procházející těžištěm – viz Obr. 2.1. Osy jsou vzhledem k těžišti na protilehlých stranách a doba kmitu kolem obou os je stejná. Tato podmínka se nastavuje posunem závaží způsobujícím změnu polohy těžiště na přímce.

Tíhové zrychlení g na zemském povrchu je zrychlení volného pádu ve vakuu a je stejné pro všechna tělesa.

Jako **normální tíhové zrychlení** se definuje g_n = 9,80665 m s^{-2}, což je přibližně tíhové zrychlení na 45° severní zeměpisné šířky při hladině moře.

Velikost tíhového zrychlení závisí na zeměpisné šířce n a nadmořské výšce h (v metrech) podle vzorce

$$g = 9{,}78049\,[1 + 10^{-6}\,(5288{,}4 \sin^2\varphi \; - 5{,}9 \sin^2 2\varphi)] - 1{,}967.10^{-6}\;\; h\,; [g] = m\,s^{-2}. \qquad (2.1)$$

Od této hodnoty se odchyluje především vlivem místních geologických podmínek.

Moment setrvačnosti J tělesa hmotnosti m vzhledem k dané ose otáčení je roven

$$J = \int_m r^2\, \mathrm{d}m \quad [J] = \mathrm{kg} \;\; \mathrm{m}^2 \;, \qquad (2.2)$$

nebo pro homogenní tělesa

$$J = \int_V r^2 \rho \,\mathrm{d}V\,, \qquad (2.3)$$

kde r je vzdálenost elementu dm, resp. dV, od osy otáčení, ρ je hustota tělesa, dV je objem elementu hmotnosti dm.

Pozn.: často se používá moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm J_0. Moment setrvačnosti vzhledem k libovolné ose s ní rovnoběžné se vypočte podle Steinerovy věty

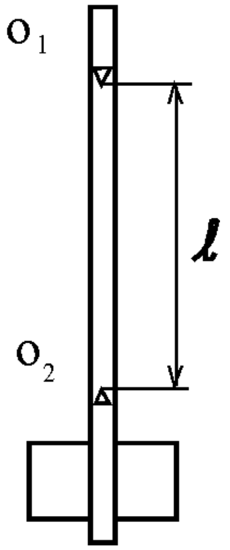
$$J = J_0 + m\,a^2 \;. \qquad (2.4)$$

Doba kyvu τ kyvadla je čas odpovídající pohybu mezi dvěma krajními polohami kyvadla nebo mezi dvěma průchody rovnovážnou polohou, **perioda** (doba kmitu) $T = 2\ \tau$ je nejkratší čas mezi dvěma stejnými polohami i směry periodického pohybu.

Metoda měření A.

Pro tíhové zrychlení volíme metodu pomocí reverzního kyvadla (obr. 2.1). Využijeme přitom poznatku, že pokud je doba kyvu kyvadla vzhledem ke dvěma osám (břitům) nesouměrným vůči těžišti stejná, vzdálenost těchto os určuje tzv. redukovanou délku ℓ reverzního kyvadla. Tíhové zrychlení pak můžeme vypočítat ze vztahu pro dobu kyvu τ_0 matematického kyvadla stejné délky ℓ

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad [\,\tau\,] = \mathrm{s} \qquad (2.5)$$



Obr. 2.1 Reverzní kyvadlo s redukovanou délkou ℓ

a odtud

$$g = \frac{\pi^2}{\tau^2}\,\ell \,. \qquad (2.6)$$

B. Pokud máme možnost zavěsit těleso tak, aby se kývalo kolem dané vodorovné osy jako fyzikální kyvadlo, můžeme určit moment setrvačnosti J. Podle obr. 2.2 platí pro fyzikální kyvadlo pohybová rovnice

$$M = J\,\varepsilon \quad [\,M\,] = \mathrm{N\,m}\,, \qquad (2.7)$$

kde $\boldsymbol{M}$ je moment tíhy tělesa vzhledem k ose otáčení a $\boldsymbol{\varepsilon}$ je úhlové zrychlení - viz obr. 2.2. Po dosazení za

$$M = -\,G\,a \sin\varphi \qquad (2.8)$$

a

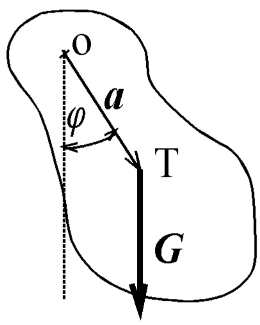
$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \qquad (2.9)$$

a s uvážením přiblížení sin $n \approx n$ v obloukové míře pro malé úhly (n < 5E) obdržíme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m\,g\,a}{J}\,\varphi = 0\,. \qquad (2.10)$$

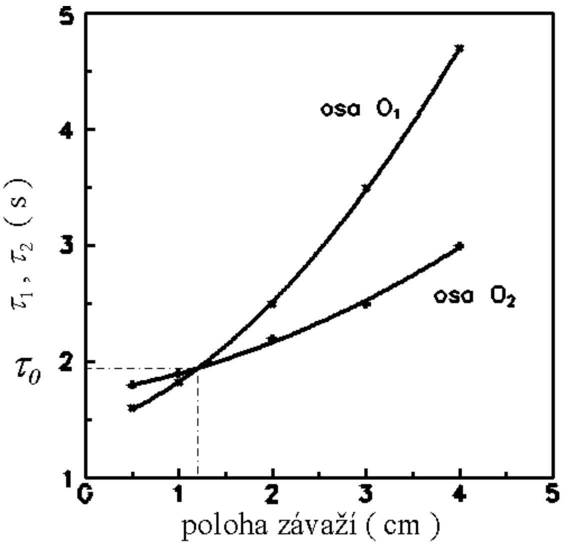
Tato rovnice představuje diferenciální rovnici harmonických kmitů s úhlovou frekvencí ω, kde

$$\omega^2 = \frac{m\,g\,a}{J}\,,\quad [\omega] = \mathrm{rad\ s^{-1}}\,. \qquad (2.11)$$



Obr. 2.2 Fyzikální kyvadlo kývající se kolem osy o rovnoběžné s osou procházející těžištěm.

Protože $\omega = \pi/\tau$ (kde τ je doba kyvu, $\tau = T/2$, T je perioda), pak moment setrvačnosti je



Obr. 2.3 Závislost doby kmitu reverzního kyvadla na vzdálenosti závaží od jedné z os.

$$J = \frac{\tau^2}{\pi^2} m\, g\, a\,. \qquad (2.12)$$

6. Pokyny pro měření

Měření provádíme pomocí stopek nebo pomocí počítače a systému ISES.

Měření pomocí stopek

Pro získání co nejpřesnějších hodnot tíhového zrychlení nebo momentu setrvačnosti vyplývají ze vztahů (2.6) a (2.12) nároky na přesnost měření délky a doby kyvu. Z toho se vyvozuje metoda měření doby kyvu pomocí stopek tak, aby její chyba nebyla v uvedených vztazích dominantní. Vycházíme z předpokladu, že:

- redukovanou délku reverzního kyvadla ℓ a vzdálenost osy otáčení fyzikálního kyvadla od těžiště a určíme s přesností dosažitelnou ocelovým měřítkem.- dobu kyvu určíme s přesností takovou, aby její vliv na výslednou chybu g byl zanedbatelný

- měřená doba jednoho kyvu je zatížena **absolutní chybou** měření doby kyvu $\Delta\tau$, což je součet reakční doby pozorovatele (asi 0,3 s), přesnosti odečítání na stupnici stopek (asi 0,1 s) a náhodné chyby. Absolutní chyba doby kyvu se zmenší, pokud budeme měřit v jednom měření více (N)kyvů. Absolutní chyba jednoho kyvu se pak sníží na $\Delta\tau/N$. Pokud k dosažení požadované přesnosti je N neprakticky velké (může dojít k utlumení kmitání), použijeme **postupnou metodu:**

Po rozkývání kyvadla spustíme stopky v libovolném průchodu tělesa rovnovážnou polohou a počítáme kyvy. Aniž bychom stopky zastavili, odečítáme a zapisujeme časy např. každé 10 periody (průchodu rovnovážnou polohou). Měřené časy zapisujeme napřed do 1. sloupce, pak do 2. sloupce tak, aby velikost sloupců byla stejná, tedy počet měření byl sudý (viz Tab. 2.1). V posledním sloupci pak vypočteme rozdíl časů, tedy dobu 100 period. Výsledky z posledního sloupce tabulky zpracujeme dle zásad určení aritmetického průměru a jeho chyby.

Doba měření touto metodou je dobou 190 period, zatímco k měření klasickému se srovnatelnou přesností bychom potřebovali dobu 1000 period a patrně by došlo k utlumení kyvadla.

počet period	čas/s	počet period	čas/s	rozdíl časů pro 100 period /s
0	0	100	51,1	51,1
10	5,1	110	55,5	50,4
...	...	...	...	...
90	45,4	190	96,5	51,0

Tab. 2.1 Měření a vyhodnocení periody kmitů postupnou metodou

Měření pomocí počítače a soupravy ISES (kap. III.4.).

Měření doby kyvu resp. periody můžeme provést pomocí zařízení ISES s **modulem optická závora**. Optická závora je světelný zdroj se snímačem světla v jedné přímce. Zaznamenává intenzitu světla v závislosti na čase (zastínění snímače např. průchodem kyvadla). **časový**

interval měření nastavíme v programu ISES tak, abychom měli k dispozici záznam požadovaného počtu kyvů (viz konfigurační soubor **fkyvadlo.cfg**). Po provedení každého měření doby kyvu je třeba data pomocí programu **uložit** -

Je možné odečítat okamžiky zastínění nebo osvětlení přímo pomocí kursoru na obrazovce a vyhodnotit je postupnou metodou. Proto je požadován „rozumný“ počet kyvů (nejméně 8). Při menším počtu kyvů se postupná metoda v programech nevyužívá.

A. Reverzní kyvadlo

K měření použijeme nejjednodušší typ reverzního kyvadla, což je kovová tyč s kovovým závažím a se dvěma pevnými osami-břity, obrácenými ostřími k těžišti, které leží nesymetricky mezi nimi – Obr. 2.1. Jestliže nalezneme polohu závaží, při které je perioda kmitů reverzního kyvadla kolem obou os stejná, chová se reverzní kyvadlo jako matematické kyvadlo délky ℓ, kde ℓ je vzdálenost os. Matematické kyvadlo je hmotný bod kmitající na nehmotném závěsu. Odhad takové polohy, resp. doby kyvu kyvadla, provedeme interpolační metodou. Protože závislost doby kyvu na poloze závaží není lineární, nemůžeme použít interpolace lineární (viz Obr. 2.3).

Jednou z uvedených metod určíme několik dvojic dob kyvů okolo dvou os (τ_1, τ_2) pro různé polohy závaží (poloha - souřadnice d závaží měřená od zvoleného bodu - např. od konce tyče). Přitom musí být splněna podmínka, že pro některé dvojice bude $\tau_1 > \tau_2$ a pro jiné $\tau_1 < \tau_2$.

B. Měření momentu setrvačnosti

U měření momentu setrvačnosti desky změříme napřed polohu těžiště a jeho vzdálenost od osy rotace, určíme hmotnost desky a odhadneme dobu kyvu. Z předběžného výpočtu chyby stanovíme, s jakou přesností je potřebné měřit dobu kyvu τ (resp. periodu) a rozhodneme o době měření. V případě využití měřící soupravy ISES postupujeme stejně jako u měření doby kyvu reverzního kyvadla.

C. Ověření výpočtem

Pro ověřovací výpočet navrhneme pravidelné těleso včetně rozměrů, jehož moment setrvačnosti umíme vypočíst analyticky a kterým desku aproximujeme (viz Tab 2.2).

Těleso		Osa, procházející těžištěm	Moment setrvačnosti k této ose
koule	poloměr r	libovolná	$2mr^2/5$
válec nebo kruhová deska	poloměr r výška h	geometrická	$mr^2/2$
		kolmá ke geom. ose	$m\left(r^2+h^2/3\right)/4$
pravoúhlý hranol	hrany a, b, c	rovnoběžná s a	$m\left(b^2+c^2\right)/12$

Tab. 2.1 Momenty setrvačnosti některých pravidelných homogenních těles

7. Pokyny pro zpracování

A. Z naměřených hodnot doby kyvu τ_1, τ_2 a příslušných poloh závaží d sestavte graf (viz obr. 2.3.). Získáte dvě křivky, jedna pro měření s o sou o_1, druhá s osou o_2 . Křivkami proložíte polynomy druhého stupně a vypočítáte pak jejich průsečík. X-ová souřadnice jejich průsečíku udává polohu závaží d_0, při níž je vzdálenost os rovna redukované délce kyvadla ℓ, y-ová udává hledanou dobu kyvu τ_0. Je nutné odhadnout chybu určení τ_0.

B. Z naměřené doby kyvu τ , délky a a hmotnosti m použitím vztahu (2.12) určíme moment setrvačnosti J a použitím vztahu (2.4) moment setrvačnosti vzhledem k těžišti J_0.

C. Pro ověření vypočteme přibližně moment setrvačnosti podle vztahu (2.3) nebo podle tabulky Tab. 2.1. Pro tento účel aproximujeme měřené těleso např. obdélníkovou deskou blízkých rozměrů, stejné hmotnosti jako měřený objekt. Oba výsledky je třeba porovnat a zdůvodnit rozdíly.

8. Kontrolní otázky

- Co je to tíhové zrychlení a na čem závisí?
- Co je to matematické kyvadlo a jak se vyjádří jeho doba kyvu?
- Jakou metodu zvolíme pro měření tíhového zrychlení?
- Co je to reverzní kyvadlo?
- Jaký je princip grafické interpolační metody pro stanovení polohy d závaží na kyvadle?
- Jaký je princip postupné metody?
- Definujte moment setrvačnosti a uveďte jeho jednotku v SI.
- Jaký je princip měření momentu setrvačnosti při měření z doby kyvu?
- Která veličina nejvíce ovlivní přesnost měření?