

Vzdálený experiment matematické kyvadlo na Přírodovědecké fakultě UJEP v Ústí nad Labem a na dvaceti dalších školách na různých zeměpisných šířkách

FRANTIŠEK LUSTIG, EVA HEJNOVÁ

UJEP Ústí nad Labem, Přírodovědecká fakulta, Česká republika

Abstrakt

Príspevek se věnuje vzdálenému experimentu s matematickým kyvadlem. Matematické kyvadlo je klasický školní experiment, který je asi ve všech školních laboratořích na středních i vysokých školách. Jedná se o jednoduchý hands-on experiment, na kterém studujeme dobu kyvu v závislosti na délce závěsu a výpočtem určíme tíhové zrychlení. My jsme tento experiment zrealizovali na Přírodovědecké fakultě UJEP v Ústí nad Labem jako vzdálený experiment, který je přístupný 24/7 bez hesla komukoliv a odkudkoliv. Dále jsme byli účastníky mezinárodního projektu WP@ELAB, který provozuje dvacet identických vzdálených matematických kyvadel, která jsou rozmístěna na vysokých školách po celém světě, a tudíž máme možnost určit tíhové zrychlení v závislosti na místě, kde se kyvadlo nachází. Vzdálený experiment Matematické kyvadlo může být alternativou k hands-on experimentu, ale přínosnější je varianta proměření matematického kyvadla jak hands-on přímo v laboratoři, tak současně doplnění úlohy o proměření tíhového zrychlení na vzdálených kyvadlech umístěných na různých zeměpisných šířkách. Tuto výjimečnou možnost nemáme v lokální laboratoři, ale se vzdálenými kyvadly si toto můžeme originálním způsobem ověřit.

Historický úvod

První zmínka o kyvadlech se objevuje ve starověkém Egyptě, kde byla používána při konstrukci dveří chrámů. Dále je z Číny známé využití kyvadla k udržování směru. Galileo Galilei kolem roku 1582 pozoroval kývavý pohyb lustru v katedrále v Pise. Měřil čas pomocí tepů svého srdce, protože nebyly k dispozici žádné přesné hodiny. Zjistil, že perioda je nezávislá na hmotnosti kyvadla, na jeho amplitudě, ale že závisí na délce závěsu.

První kyvadlové hodiny sestrojil v roce 1656 holandský vědec Christiaan Huygens. Nejlepší dosažená přesnost byla kolem 15 sekund za den. V roce 1671 francouzský astronom Jean Richer během své expedice z Paříže do Cayenne ve Francouzské Guyaně zjistil, že kyvadlové hodiny jsou na Cayenne o 2,5 minuty denně pomalejší než v Paříži. Došel k závěru, že gravitační síla byla na Cayenne nižší. Studium této závislosti ve školním prostředí je také cílem projektu WP@ELAB, který zde bude také popsán.

V současnosti se přesné měření času provádí pomocí atomových hodin. Nejpoužívanějším typem atomových hodin jsou cesiové hodiny, které využívají vlastností atomů cesia 133. Atom cesia 133 má přesně definovanou frekvenci přechodu mezi dvěma energetickými stavy, kterou lze využít jako stabilní a přesný časový standard.

Teorie k matematickému kyvadlu

V této části zmíníme precizní řešení určení tíhového zrychlení, když započítáme nepravidelný tvar Země i zjednodušenou teorii ze školního prostředí.

Podle literatury se experimentální hodnota tíhového zrychlení pohybuje mezi $9,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ na rovníku a přibližně $9,83 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ na pólech. Pro teoretický výpočet tíhového zrychlení lze nalézt mnoho různých a méně, či více komplikovaných vzorců, např. vzorec Carla Somigliany nebo mezinárodně používaný vztah Gino Casinnise pro Hayfordův elipsoid (používaný v USA od roku 1930) [1], [2]

$$g_{[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]}(\varphi, h) = 9.78049 \cdot \left[1 + 0.0052884 \cdot \sin^2 \varphi - 5.9 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2(2\varphi) \right] - 1.967 \cdot 10^{-6} \cdot h_{[\text{m}]} \quad (1)$$

kde φ je zeměpisná šířka a h značí nadmořskou výšku.

Zmíňme ještě novější vzorec závislosti g na zeměpisné šířce a výšce dle organizace WEL-MEC, což je Mezinárodní gravitační vztah (IUGG, 1967, Luzern):

$$g_{[\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]}(\varphi, h) = 9.780318 \cdot \left[1 + 0.0053024 \cdot \sin^2 \varphi - 5.8 \cdot 10^{-6} \cdot \sin^2(2\varphi) \right] - 3.085 \cdot 10^{-6} \cdot h_{[\text{m}]} \quad (2)$$

Hodnota tíhového zrychlení na zemském povrchu je výsledkem kombinace následujících faktorů: 1. gravitační zrychlení Země, 2. odstředivá setrvačná síla způsobená rotací Země, 3. nadmořská výška, 4. topografie polohy na Zemi, 5. vliv přílivu a odlivu a 6. nevyvážené přitažlivosti způsobené nepravidelnostmi v rozložení hustoty v podzemí. [2]

Pro vzdělávací účely lze tyto vlivy zanedbat. Fyzika a popis pohybu matematického kyvadla patří do základního kurzu fyziky. Obvykle z řešení diferenciální rovnice s aproximací $\sin \alpha \approx \alpha$, kde $\alpha < 4^\circ$, platí pro periodu T , délku kyvadla L a místní tíhové zrychlení g

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Z experimentálního stanovení veličin T a L je možné vypočítat lokální tíhové zrychlení

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot L}{T^2}$$

Dále zanedbáváme další podmínky, které mohou některé z těchto fyzikálních veličin ovlivnit. Např. délka závěsu L je funkcí teploty v laboratoři, zanedbáme též odpor vzduch aj.

Matematické kyvadlo jako vzdálený experiment

Lokální měření tíhového zrychlení určitě známe z laboratorních měření na středních a vysokých školách. V příspěvku se zaměříme na vzdálená měření s matematickým kyvadlem.

World Pendulum

Pravděpodobně prvním zajímavým projektem se vzdáleným kyvadlem byl německý projekt World Pendulum [3]. Zajímavou myšlenkou zde bylo rozmístění vzdálených kyvadel na různých zeměpisných šířkách. Tato kyvadla byla umístěna v Německu (Kaisersesch a Hermannsburg), Itálii (Neapol), Jemenu (Aden) a v Lotyšsku (Riga). Kyvadla se skládala z těžké ocelové koule, drátu a precizního závěsu. Inicializace kmitání byla realizována elektromagnetem pohybujícím se po kolejnici. Důležitou součástí experimentálního uspořádání byla optická

závora pro měření periody kyvadla. Přesnost měření času kolem 0,1 ms. Měřilo se lokální tíhové zrychlení na různých zeměpisných šířkách. Tyto vzdálené experimenty vznikly v roce 2007 a nyní jsou nefunkční.

World Pendulum Aliance - WPA

V roce 2019 vznikl unikátní podobný projekt World Pendulum Aliance (WPA), WP@ELAB [4]. Byla vytvořena síť vzdálených matematických kyvadel na dvaceti evropských, a hlavně jihoamerických univerzitách nacházejících se na různých zeměpisných šířkách s cílem zmapovat rozdíly v hodnotách tíhového zrychlení. Interaktivní mapa lokalit je k dispozici na

<http://wpa.tecnico.ulisboa.pt/~wpa.daemon/pendulum-network-2/> [5].

Ne všechna kyvadla jsou momentálně dostupná. Místa byla vybrána tak, aby pokrývala co nejširší rozsah zeměpisných šířek. Na odkaze

<https://elab.vps.tecnico.ulisboa.pt:8000/login?next=/apparatuses> [6]

je rozcestník se seznamem vzdálených matematických kyvadel, který obsahuje všechny potřebné údaje (geografická poloha, nadmořská výška) a všechny parametry kyvadla (délka závěsu, hmotnost a průměr koule, referenční teplota, koeficient tepelné roztažnosti, teplota v laboratoři atd.). Každý uživatel má volný přístup k jakémukoliv vzdálenému kyvadlu WPA (bez hesla, ale je vyžadován účet Google). Na obrázku 1 je WWW stránka s výsledky ze vzdáleného kyvadla.

The screenshot shows the 'World Pendulum 11 in Valparaiso-USM' experiment page. It includes a description of the experiment, a table of pendulum parameters, and two data plots. The histogram shows the distribution of measured periods, and the 'Sample vs Linear Velocity' plot shows a linear relationship between velocity and period.

Cable length [m]	Mass of the sphere [kg]	Latitude	Longitude	Altitude [m]	Diameter of the sphere [mm]	Cable shear modulus (modulus of rigidity) [GPa]	Elasticity constant [GPa]	Thermal expansion coefficient [K ⁻¹]
2.0275 ± 0.0002	2.4 ± 0.075	33°15'	71°37' W	30	81.8 ± 0.1	45.60	200	1.4E-6

Obrázek 1. Ukázková WWW stránka se vzdáleným WPA matematickým kyvadlem. Vlevo je úvodní stránka s parametry kyvadla včetně polohy, vpravo WWW stránka s naměřenými výsledky.

Cílem vzdáleného měření je samozřejmě určit gravitační zrychlení jako funkci geografické polohy. Lze studovat i přesnější úlohy jako teplotní závislost délky zavěšení, tlumení třením vzduchu, slapová závislost na poloze Měsíce a Země atd.

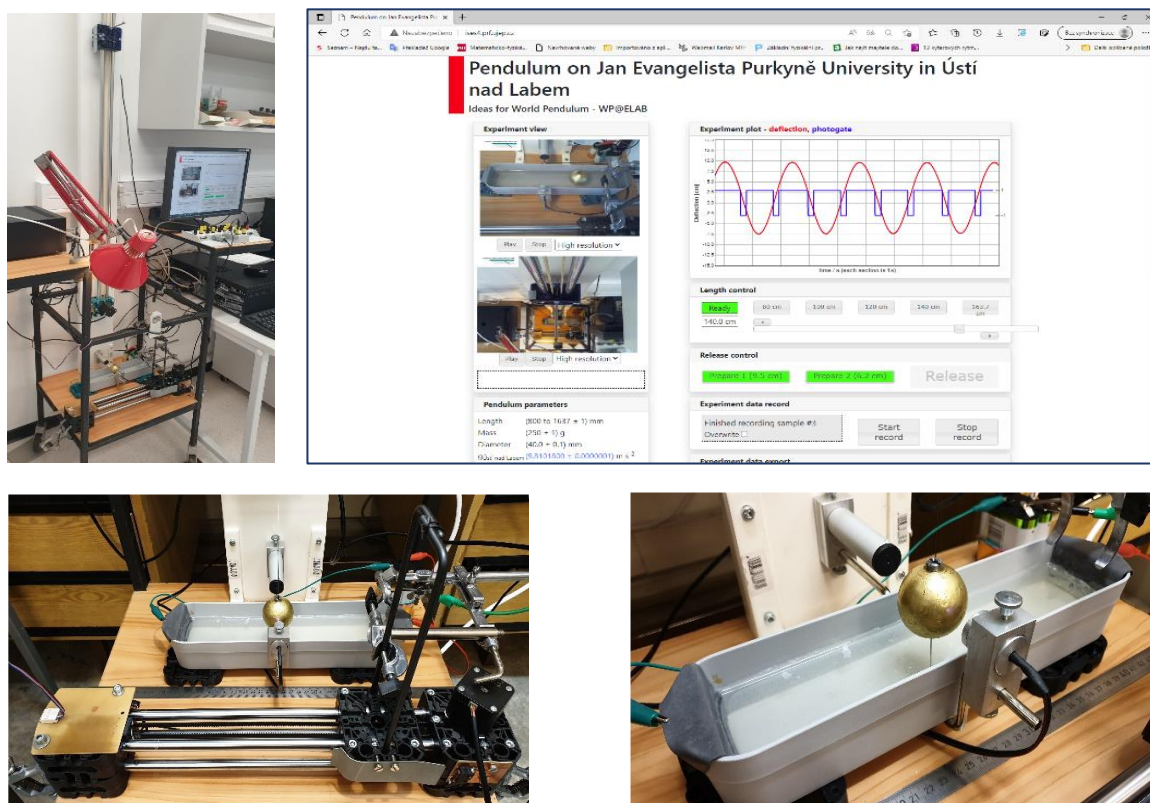
Ukázka naměřených tíhových zrychlení:

- UMag, Punta Arenas, Chile: $g = 9,8348(18) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$
 UnB, Brasília, Brasil: $g = 9,78499(5) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
 Planetarium, Lisabon, Portugal: $g = 9,8012(24) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$,
 UJEP, Ústí nad Labem, CZ: $g = 9,82(2) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (pro srovnání s kyvadlem na PřF UJEP)

Vzdálené matematické kyvadlo na PřF UJEP v Ústí nad Labem

Pravděpodobně jeden z nejpropracovanějších experimentů se vzdáleným kyvadlem se nachází v naší laboroři na Přírodovědecké fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně (PřF UJEP) v Ústí nad Labem. Experiment byl spuštěn v roce 2021, je plně funkční a lze k němu přistupovat 24/7 bez hesla pomocí standardního prohlížeče na adrese

<http://ises4.prf.ujep.cz> [7].



Obrázek 2. Experimentální sestava vzdáleného experimentu Matematické kyvadlo na Přírodovědecké fakultě UJEP v Ústí nad Labem. Vlevo nahoře celkový pohled, vpravo nahoře WWW stránka s měřicím rozhraním, vpravo a vlevo dole detailní pohled na zavěšenou kouli a vodní potenciometr, který snímá výchylku.

Matematické kyvadlo (viz obrázek 2) s proměnnou délkou zavěšení (0,8 m až 1,6 m) a nastavitelnou počáteční výchylkou 9,5 cm, nebo 6,5 cm. Perioda kyvadla se měří pomocí optické brány a výchylka se zobrazuje pomocí potenciometru na vodní bázi. Pod koulí se nachází vodní nádrž se dvěma olověnými elektrodami připojenými na konstantní napětí. Na spodní části koule kyvadla je připevněna miniaturní jehla, která se dotýká vodní hladiny. Měří se napětí mezi polohou jehly a jednou elektrodou. Toto napětí je úměrné výchylce matematického kyvadla. Experimentální nastavení je monitorováno dvěma webovými kamerami, které poskytují živý videostream.

Softwarová část vzdáleného experimentu využívá sadu pro vývoj softwaru „iSES Remote Lab SDK“ [8]. Klienti se ke vzdálenému experimentu připojují pomocí běžných webových prohlížečů. Software vzdáleného experimentu je vytvořeno v JavaScriptu, takže vzdálený experiment lze spustit nejen na počítačích, ale i na mobilních telefonech.

Praktickými úkoly tohoto vzdáleného experimentu je určit místní tíhové zrychlení, změřit závislost periody kyvadla na jeho délce a na počátečním úhlu vychýlení. Lze též studovat kinetickou, potenciální a celkovou mechanickou energii kyvadla, tlumení způsobené třením vzduchu a na vodním potenciometru.

Vzdálený experiment Matematické kyvadlo je na Přírodovědecké fakultě Univerzity J. E. Purkyně zařazen do předmětu Fyzikální praktikum z mechaniky a termiky, který je určen pro studenty prezenčního i kombinovaného bakalářského studia studijního programu Fyzika pro vzdělávání. Studenti ho obvykle absolvují v letním semestru v 1. ročníku. Se vzdáleným experimentem se v tomto praktiku setkává většina studentů během svého vysokoškolského studia poprvé. Studenti mají možnost volby mezi provedením prezenčního měření s matematickým kyvadlem, které je umístěno v praktiku, a měřením pomocí vzdáleného experimentu, který mohou realizovat buď přímo v praktiku, nebo samostatně z místa, které si sami zvolí (např. z domova). Naše dosavadní zkušenost ukázala, že většina studentů studujících prezenční studium volí druhou možnost, tj. provést měření se vzdáleným kyvadlem, a pokud jim to situace umožňuje, volí nejčastěji možnost pracovat na svém notebooku pod dohledem vyučujícího v rámci běžné výuky praktika. Kombinovaní studenti, což jsou vesměs nekvalifikovaní učitelé středního věku, kteří vyučují na základních školách, volí častěji možnost prezenčního měření se skutečným kyvadlem, které je umístěno v praktiku.

Cílem této experimentální úlohy je určit hodnotu lokálního tíhového zrychlení a zjistit, jak závisí doba kmitu matematického kyvadla na jeho délce. Ze vzdáleného experimentu získají studenti velký počet hodnot zaznamenaných v excelovské tabulce. Musí tak zpracovat rozsáhlý soubor dat, což pro ně bývá zpravidla nová zkušenost. Jejich úkolem je nalézt správnou metodiku, jak v souboru naměřených hodnot vyhledat hodnoty výchylek kyvadla, které odpovídají jedné periodě kyvadla. K tomu jim pomohou pomoci i zobrazené grafy ze vzdáleného experimentu (viz obrázek 2), které studentům umožňují analyzovat a interpretovat výsledky experimentu. Zpracování měření zahrnuje také grafické znázornění závislosti doby kmitu matematického kyvadla na druhé odmocnině jeho délky.

V rámci zpracování měření musí studenti určovat také chybu (nejistotu) měření a provést její diskusi s ohledem na možné chyby použité metody měření. V chybě metody se zpravidla odráží nepřesnost určení délky kyvadla a nepřesnost určení periody kyvadla. Protože studenti opakují měření pro každou délku kyvadla alespoň pětkrát, mohou určit i statistickou chybu a stanovit chybu celkovou. Nakonec mohou porovnat zjištěnou hodnotu lokálního tíhového zrychlení s teoretickou hodnotou, kterou si mohou vyhledat na internetu nebo vypočítat pomocí rovnice (1), resp. (2).

Diskuze

Mezi didaktické přínosy měření s využitím vzdáleného experimentu patří zejména jeho flexibilita a dostupnost, tj. možnost provádění měření bez omezení času a místa, což může pomoci zejména studentům, kteří se z různých důvodů nemohou prezenční výuky účastnit. To umožňuje studentům zvolit si při realizaci měření individuální tempo a v neposlední řadě také podporuje jejich samostatnou práci. Nepochybným přínosem vzdáleného experimentu je i možnost jeho vizualizace (experiment je snímán kamerou), která poskytuje studentům lepší představu o chování kyvadla a fyzikálních jevech s ním spojených. Také možnost interakce studentů s kyvadlem (studenti mohou měnit jeho délku a velikost počáteční výchylky) zvyšuje atraktivnost vzdáleného měření a motivaci studentů k pečlivému zpracování získaných dat z měření.

Je však důležité zmínit i některá omezení, která s sebou vzdálený experiment přináší. Ta spočívají především v nedostatku fyzického kontaktu se skutečným kyvadlem. Vzdálený experiment obvykle neposkytuje studentům stejnou zkušenost jako experiment se skutečným kyvadlem, protože ztrácejí možnost přímo pozorovat a měřit fyzikální veličiny pomocí skutečných měřicích přístrojů. To může být také důvod, proč dávají reálnému experimentu přednost právě starší studenti, kteří již zpravidla nepatří ke generaci, která se v on-line prostředí pohybuje od útlého věku. Při diskusi možných chyb u vzdáleného měření také nemohou být diskutovány systematické chyby, které se běžně vyskytují v reálných experimentech, což může omezit porozumění studentů praktickým aspektům experimentálního měření. Tuto skutečnost může do určité míry eliminovat předvedení vzdáleného kyvadla studentům tak, aby měli možnost se se vzdáleným experimentem blíže seznámit a probíhající experiment reálně pozorovat. V protokolu pak mohou diskutovat možné faktory, které mají na výsledky měření vliv jako je tření vzduchu, tření jehly ve vodní hladině, nepřímou trajektorii koule apod.

Při využití vzdáleného experimentu je tedy důležité vždy zvážit přínosy i omezení v porovnání s tradičním experimentem, což umožní jeho efektivní a inovativní začlenění do fyzikálního praktika. Proto je třeba spolehlivě zajistit, aby byl experiment pro studenty dobře on-line dostupný a aby byl udržován ve fungujícím stavu, tj. je nezbytné pravidelně provádět testování experimentu a jeho údržbu, aby se technické problémy minimalizovaly. Studentům je také třeba poskytnout srozumitelný návod k úloze s vysvětlením základních fyzikálních principů a postupem měření, aby byli studenti schopni samostatně pracovat.

Cennou zpětnou vazbu nám poskytli studenti, kteří v akademickém roce 2022/23 ve fyzikálním praktiku se vzdáleným experimentem pracovali. Z reakcí studentů prezenčního studia je zřejmé, že je pro ně tato forma měření zajímavým osvěžením v jinak tradičně pojetém praktiku, které pro ně často bývá poněkud monotónním sledem měření jednotlivých úloh, na něž navazuje vesměs časově náročné, a tudíž nepříliš oblíbené, zpracování výsledků měření. U studentů kombinovaného studia byl ke vzdálenému experimentu patrný spíše určitý odstup a nedůvěra, jak už bylo dříve uvedeno.

Závěr

V příspěvku jsme prezentovali vzdálené experimenty s matematickým kyvadlem, které umožňují proměřovat závislosti lokálního tíhového zrychlení na zeměpisné šířce (World Pendulum project, WP@ELAB). Hlavním rysem a předností projektu World Pendulum je *jednotné hardwarové a uživatelské rozhraní*, které umožňuje jednoduchou automatizaci zpracování dat celosvětovými uživateli, díky čemuž jsou tato vzdálená měření a zpracování dat velmi efektivní.

Dále jsme prezentovali zkušenosti s využitím vzdáleného experimentu ve vysokoškolském fyzikálním praktiku na PŘF UJEP Ústí nad Labem, které nám přinesly zajímavé poznatky o přínosech, ale i omezeních této moderní didaktické metody. Flexibilita, dostupnost, interaktivita vzdáleného experimentu a také možnost experimentálního ověřování teoretických poznatků jsou klíčové aspekty, které měření v praktiku výrazně obohacují a zvyšují jeho atraktivnost. Přestože existují určitá omezení spojená s nedostatkem fyzického kontaktu se skutečným experimentem, vzdálený experiment představuje ve fyzikálním praktiku efektivní a inovativní nástroj, který se snaží využít moderní technologie ve prospěch studentů, kteří si tak mohou osvojovat nové dovednosti.

Důležitý a doporučený závěr tohoto příspěvku:

Vyzkoušejte kombinovat lokální i vzdálené měření s matematickými kyvadly!

Literatura

- [1] *Theoretical gravity* (Wikipedia) [online] https://en.wikipedia.org/wiki/Theoretical_gravity [accessed 29-Sep 2023]
- [2] *Acceleration around Earth, the Moon, and other planets* (Britannica) [online] www.britannica.com/science/gravity-physics/Acceleration-around-Earth-the-Moon-and-other-planets [accessed 29-Sep 2023]
- [3] Gröber S., Vetter M., Eckert B. and Jodl H.-J. 2007 *World Pendulum – a distributed Remotely Controlled Laboratory (RCL) to measure the Earth’s gravitational acceleration depending on geographical latitude* (EJP 28 3) pp 603–613
- [4] Santos M. et al 2019 *World Pendulum Alliance (Proc. of 2019 5th Experiment@ international conference)* pp 272–273 ISBN 978-1-7281-3637-0
- [5] *Pendulum network* [online] <http://wpa.tecnico.ulisboa.pt/~wpa.daemon/pendulum-network-2/> [accessed 29 Sep-29 2023]
- [6] *World pendulum list* [online] <https://elab.vps.tecnico.ulisboa.pt:8000/login?next=/apparatuses> [accessed 29-Sep 2023]
- [7] Lustig F., Brom P. and Dvorak. J 2021 *Pendulum at UJEP* (Ústí nad Labem: UJEP) [online] <http://ises4.prf.ujep.cz> [accessed 29-Sep 2023]
- [8] Lustig F., Dvořák J., Kurišćák P. and Brom P. 2016 *Open modular hardware and software kit for creations of remote experiments accessible from PC and mobile devices* (International journal of online engineering vol 12 issue 7) pp 30–36 ISSN 1868-1646
- [9] Lustig F. and Hejnová E. 2021 *Vzdálené experimenty* (PřF UJEP v Ústí nad Labem), e-texty úloh [online] <https://www.physics.ujep.cz/cs/vzdalene-experimenty/> [accessed 29-Sep 2023]